Proponowane Rozwiązania

Zadanie 1. *Znaleźć zbiór punktów zbieżności szeregu funkcyjnego*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} x^{3n+1}$$

Rozwiązanie: Zauważmy, że jest to szereg potęgowy postaci $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, gdzie $a_k = \begin{cases} 0 & k \neq 3n+1 \\ \frac{(n!)^3}{(3n)!} & k = 3n+1 \end{cases}$. Oczywiście szeregi $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, $\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} x^k$ mają te same promienie zbieżności (wynika z wzoru Cauchy'ego Hadamarda - granica "nie widzi" przesunięcia indeksu o ustaloną skończoną liczbę). Będziemy więc rozważać ten drugi szereg, który równoważnie możemy przepisać $\sum_{n=0}^{\infty} a_{3n+1} (x^3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} y^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n y^n$, gdzie $y = x^3$ oraz $b_n = \frac{(n!)^3}{(3n)!}$. Wówczas jest to szereg potęgowy zmiennej y (to o tyle nam ułatwi zadanie, że kolejne współczynniki b_n są niezerowe, więc mamy prostsze kryteria). Spoglądając na iloraz $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ dostajemy:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n!)^3 (n+1)^3}{(3n)!(3n+1)(3n+2)(3n+3)} \frac{(3n)!}{(n!)^3} = \frac{(n+1)^2}{3(3n+2)(3n+1)}$$

co wraz z $n \to \infty$ zmierza do $\frac{1}{27}$, skąd promieniem zbieżności szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} b_n y^n$ jest $R_y = 27$. Co do punktów $y \in \{-27, 27\}$ dostajemy wówczas szeregi $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n 27^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n 27^n$ odpowiednio. Zauważmy, że: $\frac{b_{n+1} 27^{n+1}}{b_n 27^n} = \frac{9(n+1)^2}{(3n+1)(3n+2)} > 1$, czyli nie jest spełniony warunek konieczny. Wracając do zmiennej x, dostajemy $R_x = 3$ (ponieważ $|y| < 27 \iff |x^3| < 27 \iff |x| < 3$). Na mocy początkowych rozważań o równości promieni zbieżności wyjściowego szeregu, jak i tego na którym pracowaliśmy, dostajemy, że zbiorem punktów zbieżności szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} x^{3n+1}$ jest przedział $(-3, 3)$.

Zadanie 2. *Rozwiń funkcję*

$$f(x) = \arctan(\frac{1-x^2}{1+x^2})$$

w szereg Maclaurina. Znajdź zbiór punktów zbieżności tego szeregu.

Rozwiązanie: Licząc pierwszą pochodną funkcji f, dostajemy

$$f'(x) = \frac{1}{1+(\frac{1-x^2}{1+x^2})^2} \cdot \frac{-2x(1+x^2) - 2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{(1+x^2)^2}{(1+x^2)^2 + (1-x^2)^2} \cdot \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$$

Upraszcza się to do $f'(x) = \frac{-2x}{1+x^4}$ co możemy rozwinąc w następujący szereg: $f'(x) = -2x \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k (x^4)^k = 2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}x^{4k+1}$, który jest szeregiem potęgowym o promieniu zbieżności 1, zatem uzasadnione jest całkowanie wyraz po wyrazie wewnątrz promienia zbieżności, całkując dostajemy

$$f_C(x) = C + 2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{4k+2}x^{4k+2}$$

Wstawiając $x = 0$ dostajemy $\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = f_C(0) = C$. Skąd szukanym rozwinięciem jest

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{2k+1}x^{4k+2}$$

Nietrudno zauważyć, że promieniem zbieżności tego szeregu jest również $R = 1$. Pozostało sprawdzić punkty $x = 1$ i $x = -1$. Zarówno dla $x = 1$ jak i $x = -1$ szereg postaci $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{2k+1}$, który jest zbieżny na mocy kryt. Leibnitza.
Konkluzja: f rozwija się w szereg Maclaurina postaci:

$$\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{2k+1}x^{4k+2}$$

którego zbiorem punktów zbieżności jest przedział $[-1, 1]$

Zadanie 3. *Niech* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *będzie klasy* $C^\infty(\mathbb{R})$ *oraz dla* $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$ *zachodzi:*

$$|f^{(n)}(x)| \le e^{nx}$$

Niech $\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ *będzie szeregiem Maclaurina funkcji* f. *Udowodnić, że* $f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ *dla każdego* $x \in \mathbb{R}$.

Rozwiązanie: Innymi słowy, trzeba pokazać, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$, ciąg $(\sum_{n=0}^N a_n x^n)_{N\in\mathbb{N}} =: (b_N(x))_{N\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do $f(x)$. Wiemy, że $\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ jest szeregiem Maclaurina dla funkcji f. Z racji, że f jest gładka, możemy ją rozwinąc jako:

$$f(x) = \sum_{n=0}^N a_n x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi_{x,N})}{(n+1)!} x^{N+1} = b_N(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi_{x,N})}{(n+1)!} x^{N+1}$$

gdzie $\xi_{x,N}$ leży między 0, a punktem x. (Możemy tak rozwinąć dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ oraz $N \in \mathbb{N}$, ponieważ f jest gładka na całym $\mathbb{R}$). Pozostaje zbadać zachowanie $|f(x) - b_N(x)|$. Z powyższych obserwacji, jest to równe:

$$\frac{1}{(N+1)!} |x|^{N+1} |f^{(N+1)}(\xi_{x,N})| \le \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \exp((N+1)\xi_{x,N})$$

Funkcja $t \to \exp((N+1)t)$ jest rosnąca, skąd mamy następujące oszacowanie: $\exp((N+1)\xi_{x,N}) \le \exp((N+1)|x|)$, zatem:

$$|b_N(x) - f(x)| \le \big(|x| \exp(|x|)\big)^{N+1} \frac{1}{(N+1)!} = \frac{a^{N+1}}{(N+1)!}$$

gdzie $a = |x| \exp(|x|)$ jest ustalone. Powyższe wyrażenie wraz z $N \to \infty$ zbiega do 0. (Wiedzą już Państwo, że nawet szereg $\sum_{N=1}^\infty \frac{a^{N+1}}{(N+1)!}$ jest zbieżny). Pokazaliśmy więc, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ mamy równość

$$f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n$$

Zadanie 4. *Oblicz całki nieoznaczone*

$$(a) \qquad \int e^{x+e^x} - e^{x-e^x} dx$$

$$(b) \qquad \int xe^x \sin(x)\cos(x) dx$$

$$(c) \qquad \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1} dx$$

Rozwiązanie: a) Zauważmy, że funkcja podcałkowa jest postaci

$$e^x(e^{e^x} - e^{-e^x})$$

Podstawmy więc $t = e^x$ jako, że udało nam się wyłączyć przed nawias pochodną wyrażenia e^x. Wówczas dostaniemy:

$$\int e^t - e^{-t} dt = e^t + e^{-t} + C \qquad C \in \mathbb{R}$$

Wracając do początkowej zmiennej x, otrzymujemy:

$$\int e^{x+e^x} - e^{x-e^x} dx = e^{e^x} + e^{-e^x} + C \qquad C \in \mathbb{R}$$

b) Zauważmy, że $\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$. Będziemy więc liczyć

$$\frac{1}{2}\int xe^x \sin(2x) dx$$

Pomysł będzie taki, żeby pozbyć się x podczas całkowania przez części. Musimy w tym celu poznać funkcję pierwotną funkcji $e^x \sin(2x)$. To liczymy

$$\int e^x \sin(2x) dx = e^x \sin(2x) - 2\int e^x \cos(2x) dx = e^x \sin(2x) - 2e^x \cos(2x) - 4\int e^x \sin(2x) dx$$

gdzie dwa razy zastosowaliśmy całkowanie przez części. Po "przerzuceniu" na jedną stronę, dostajemy

$$\int e^x \sin(2x) dx = \frac{e^x}{5}(\sin(2x) - 2\cos(2x)) + C \qquad C \in \mathbb{R}$$

Czyli widzimy, że jako funkcje pierwotną $e^x \sin(2x)$ możemy użyć np. funkcję: $\frac{e^x}{5}(\sin(2x) - 2\cos(2x))$. Uwzględniając to i całkując przez części otrzymujemy:

$$\int xe^x \sin(2x) dx = x\frac{e^x}{5}(\sin(2x) - 2\cos(2x)) - \frac{1}{5}\int e^x \sin(2x) - e^x 2\cos(2x) dx$$

Widzimy, że ostatnim potrzebnym nam elementem jest

$$\int e^x \cos(2x) dx$$

którą wyliczamy analogicznie jak do przypadku z sinusem, czyli dwa razy przez części:

$$\int e^x \cos(2x)dx = e^x \cos(2x) + 2e^x \sin(2x) - 4\int e^x \cos(2x)dx$$

skąd

$$\int e^x \cos(2x)dx = \frac{e^x}{5}(2\sin(2x) + \cos(2x)) + C \qquad C \in \mathbb{R}$$

Uwzględniając to w wyniku, dostajemy:

$$\int xe^x \sin(2x)dx = \frac{xe^x}{5}(\sin(2x)-2\cos(2x))+\frac{e^x}{25}(3\sin(2x)+4\cos(2x))+C \qquad C \in \mathbb{R}$$

c) Mianownik jest postaci $x^3 - x^2 + x - 1 = (x-1)(x^2+1)$. Rozpiszmy licznik $x^4 + 1 = x^2(x^2+1) - (x-1)(x+1)$. Oznacza to:

$$\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}dx = \int \frac{x^2}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+1}dx$$

Mamy do policzenia dwie całki, zaczniemy od tej pierwszej:

$$\int \frac{x^2}{x-1}dx = \int x + 1 + \frac{1}{x-1}dx = \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| + C_1 \qquad C_1 \in \mathbb{R}$$

gdzie użyliśmy rozpisania $x^2 = (x^2 - x) + (x-1) + 1$.
Co do drugiej całki, mamy:

$$\int \frac{x+1}{x^2+1}dx = \int \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1}dx + \frac{1}{x^2+1}dx$$

Teraz w pierwszej z tych po prawej należy podstawić $t = x^2$, sprowadzając do całki $\int \frac{1}{2}\frac{1}{t+1}dt$, natomiast drugą to już Państwo powinni znać - $\frac{1}{x^2+1}$ to pochodna funkcji $x \to \arctan(x)$. Otrzymujemy więc:

$$\int \frac{x+1}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + \arctan(x) + C_2 \qquad C_2 \in \mathbb{R}$$

Zbierając wszystko w jedną całość, mamy:

$$\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}dx = \frac{x^2}{2}+x+\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x^2+1|-\arctan(x)+C \qquad C \in \mathbb{R}$$

Standardowe podejście liczenia całki typu wielomian/wielomian (to znaczy podzielić z resztą, otrzymując wielomian + (reszta/mianownik) i dalej ułamki proste) też oczywiście tutaj działa. W gruncie rzeczy rachunki do trudniejszych nie należą.